ABBREVIAZIONI:

- s.d.g = sistema di generatori;
- sott. = sottospazio/i vettoriale/i;
- l.i = linearmente indipendente;
- l.d = linearmente dipendente;
- c.v.d = come volevasi dimostrare;

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

SPAZIO VETTORIALE

Insieme V per cui sono definite 2 operazioni:

$+ : V \times V \to V$ (somma)

$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ (prodotto per scalare)

Proprietà.

1. $\forall v, w, z \in V \quad v + (w + z) = (v + w) + z$
2. $\forall v, w \in V \quad v + w = w + v$
3. $\forall v \in V \ \exists (-v) \in V$ tale che $v + (-v) = (-v) + v = 0$

$\Big\}$ $(V, +)$ gruppo com.

4. $\exists 0 \in V$ tale che $0 + v = v + 0 = v \quad \forall v \in V$
5. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall v, w \in V \quad \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
7. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V \quad (\lambda \cdot \mu)v = \lambda(\mu \cdot v)$
8. $\forall v \in V \ \exists 1 \in \mathbb{R}$ tale che $1 \cdot v = v \cdot 1 = v$

   $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tale che $0 \cdot v = v \cdot 0 = 0$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

master
COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

CAPITOLO 1

TRASLAZIONI

vettore di coordinate (x_0, y_0) agisce su un punto $P(x, y)$ e lo trasla in $P'(x', y')$

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$$

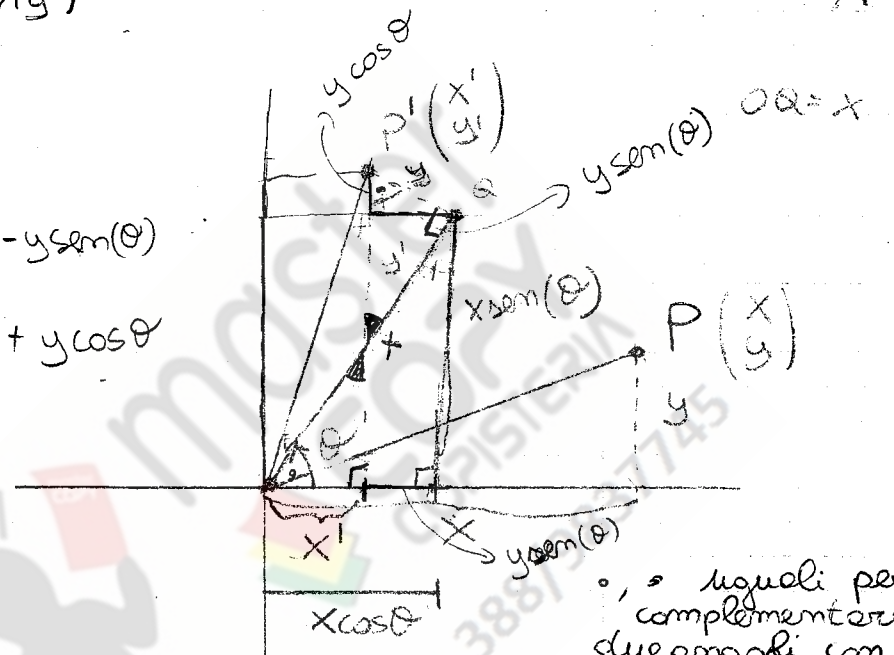
OMOTETIE di ragione $\lambda \neq 0$ centrata nell'origine O

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad P' = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

ROTAZIONI

angolo θ

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}(\theta) \\ y' = x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{cases}$$



θ, θ' uguali perché complementari di due angoli con stesse ampiezze

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

NUMERI COMPLESSI

TEOREMA

$\nexists q \in \mathbb{Q}$ tale che $q^2 = 2$

Supponiamo per assurdo che esista q e che $q = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ ed m, n primi fra loro ($M.C.D. = 1$)

$q^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$ dunque 2 divide m^2 $(2 \mid m)$

$m = d \cdot m' = 2m'$ $\quad 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow 4m'^2 = 2n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(m')^2 = n^2$ dunque 2 divide n^2 $(2 \mid n)$

$\Rightarrow$ m, n hanno dunque un divisore comune ↯

OSS. Calcolare i^{257678}

$257678 = 4 \cdot 64419 + 2$

$i^2 = -1$

TEOREMA

Radice n-esimo di un numero complesso

$$z^n = w \qquad z = \rho_z(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha) \qquad z^n = \rho_z^n(\cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}\,n\alpha)$$

$$w = \rho_w(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)$$

$$\begin{cases} \rho_z^n = \rho_w \\ n\alpha = \beta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_z = \sqrt[n]{\rho_w} \\ \alpha = \dfrac{\beta + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

$$z_k = \sqrt[n]{\rho_w}\left(\cos\left(\frac{\beta+2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\beta+2k\pi}{n}\right)\right) \qquad k = 0, \dots, n-1$$

TEOREMA

Se z è soluzione $\Rightarrow$ $\bar{z}$ è soluzione

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

Se z è radice allora:

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0$$

Sappiamo che $\bar{0} = 0$ (0 reale)

$$\overline{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n} = \bar{0}$$

$$\overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \dots + \overline{a_n z^n} = 0$$

$$a_0 + a_1\bar{z} + \dots + a_n(\bar{z})^n = 0 \Rightarrow p(\bar{z}) = 0 \Rightarrow \bar{z} \text{ è radice}$$

$V = K$-spazio vettoriale allora valgono le proprietà:

① $(-1)v = -v$

$$(-1)v = 0 + (-1)v = v - v + (-1)v = 1\cdot v - v + (-1)v = -v + (\underbrace{-1+1}_{0})v = -v$$

② $\lambda \cdot \underbrace{0}_{u} = 0$

$$\lambda(0+0) = \lambda 0 + \lambda 0$$

$$\cancel{\lambda 0} = \cancel{\lambda 0} + \lambda 0 \Rightarrow \lambda 0 = 0$$

③ $\lambda v = 0 \Rightarrow v = 0 \quad \lambda \in K \setminus \lambda \neq 0$

$$0 = \lambda^{-1}0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = v$$

muster COPY COPISTERIA 030/8312126 388/9837745

TEOREMA

· Esistenze infiniti numeri primi.

$|P| = \infty$ con $P = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è primo} \}$

① ASSURDO

② MAGGIORANZA STRATEGICA

③ RICONDURSI A EQUAZIONE IMPOSSIBILE IN $\mathbb{N}$

① per assurdo supponiamo che $\exists p_1, \dots, p_k$ primi finiti tali che $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$

Scriviamo $N = \prod_{i=1}^{k} p_i + 1$ ⟨ ⓐ che $N \neq p_i$; ⓑ che N è primo

② ⓐ $N > \prod_{i=1}^{k} p_i \geq_j p_i \implies N \neq p_i \ \forall i$

perché siamo in $\mathbb{N}$

ⓑ Per assurdo N non primo $\rightarrow \exists p_i$ tale che $p_i \mid N$

Quindi posso scrivere $N = p_i \cdot N'$ ma $N = \prod_{i=1}^{k} p_i + 1$

(dove p_i è divisore)

$$p_i N' = \prod_{i=1}^{k} p_i + 1$$

Senza perdere generalità supponiamo $p_i = p_k$

$$\implies N = p_k N' = p_k \prod_{i=1}^{k-1} p_i + 1$$

$$p_k \left(N' - \prod_{i=1}^{k-1} \right) = 1$$ assurdo perché in $\mathbb{N}$ non c'è l'inverso

TEOREMA

Sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ possiede minimo.

① CONTRONOMINALE

② INDUZIONE e ASSURDO

① $X \subseteq \mathbb{N}$ con X non minimo (IPOTESI (i.e. X non ha minimo)) $\implies X = \emptyset$ (TESI) i.e $\mathbb{N} \setminus X = \mathbb{N}$

② PASSO BASE

$n = 0$ Supponiamo per assurdo che $0 \in X$, assurdo perché 0 è minimo di $\mathbb{N}$ dunque di X